

<<算术探索>>

图书基本信息

书名：<<算术探索>>

13位ISBN编号：9787560334097

10位ISBN编号：7560334091

出版时间：2011-12

出版时间：哈尔滨工业大学出版社

作者：高斯

页数：490

译者：潘承彪,张明尧

版权说明：本站所提供下载的PDF图书仅提供预览和简介，请支持正版图书。

更多资源请访问：<http://www.tushu007.com>

## &lt;&lt;算术探索&gt;&gt;

## 前言

本书所探索的内容是属于数学中研究整数的那一部分，在大多数情形将不讨论分数，而且从不涉及无理数（俄、德为“虚数”以后再加译注）。

通常所谓的不定分析或Diophantus分析，是讨论从满足一个不定方程的无穷多个解中去选出那些是整数或至少是有理数（通常还要求是正的）解的学问，它并不是彻底研究这一学科，而仅是这学科的十分特殊的一部分，它和这整个学科的关系差不多如同方程变形与解方程的学问（代数学）与整个分析学的关系一样。

这就是说，如同所有涉及数量及它们之间的一般性质的研究属于分析的领域一样，整数（及分数——在它们由整数确定的意义下）是算术研究的真正对象。

然而，因为通常所说的算术很难超出记数与计算的技巧（即以确定的形式来表示数，例如十进位表示，以及对其进行算术运算），同时它还常常包含这样一些问题，它们或者与算术毫无关系（如对数理论），或者不仅对整数而且对任意的数量也有意义，所以这样来区分这两部份算术看来是适当的：把刚刚说到的这些称为初等算术，而把所有关于整数间内在联系的一般研究归入高等算术。

本书将只讨论高等算术。

Euclid在其《几何原本》的第七及其后几卷中，以古人所固有的优美而又严格讨论的论题就是属于高等算术，不过这些内容仅可看做是这学科的一个导引。

全部用于讨论不定分析问题的Diphantus的名著包含了许多研究，由于它们的难度及他所用的精妙方法，特别是，考虑到只有很少的辅助工具可供他应用，这些研究激起了人们对作者的才智和洞察力的高度关注。

然而，因为对这些问题要求创新性和灵巧性甚于需要深刻的原理。

此外，这些问题过于特殊以及很难导致更为普遍性的结论，所以，把这本书看做是开创了一个数学迅速发展的时代，是由于它本身记录了代数学所特有的巧妙技巧的最早踪迹，而不是由于它以新的发现丰富了高等算术。

主要的是由于近期的研究，虽然确实不多，但赢得了永恒的美誉，它们是属于P.de Fermat, L.Euler, L.Lagrange及A.M.Legendre（以及另外少数几位），我们应当感谢他们开启了通向这一神圣科学宝藏的入口，并揭示了它所蕴含的宝藏是何等丰富。

但是，我不再在这里列举这些学者的一个又一个发现，因为它们可在Lagrange为Euler的《代数学》所加的附录的前言中，及Legendre最近的著作（我将立刻提到它）中找到；此外，这些发现中的许多也将在本书的相应之处加以引述。

本书的目的是介绍我在高等算术领域所做的探索与研究，早在五年前我就允诺要出版这本书，现在它包括了我在早前及在这一段时间所做的两部份工作。

为了避免有人感到奇怪，为什么本书的内容要追溯到许多最简单的原理，而且还要重新讨论许多已被其他人卓有成效地研究过的结果，我在此必须向读者说明：当我在1795年初开始转向这种探索时，我并不知道这一领域中近期的这些最新发现，同时用于得到我自己的结果的方法技巧都是我自己想出来的。

事情是这样的，在从事其它工作时我偶然发现了一个极不寻常的正确的算术命题（如果我没有记错的话，这就是本书第108目所说的那个定理），因为我认为不仅它本身是这样的漂亮，而且感觉到它还会与其他著名的重要结论有联系，所以我把自己的全部精力集中于去搞清楚它所依赖的原理并给出严格的证明。

当我在这方面最后取得成功后，我就被这些问题所深深地吸引而一发不可收拾了。

这样一来，在我接触到其他学者的类似研究工作之前，我就已经得到了一个又一个结论，从而完成了本书前四篇所介绍的绝大多数内容。

最后，当我有可能拜读这些天才人物的著作后，我才认识到我所深入思考的大部分内容都是早已知道的东西。

但是，这只是更增加了我的兴趣，并努力尝试沿着他们的足迹进一步去发展算术。

这就产生了不同的研究，其中的部分结果已被安排在第五、第六和第七篇中。

## &lt;&lt;算术探索&gt;&gt;

稍后，我开始考虑发表我努力所得的这些成果，并说服自己不要删去任何早期研究所得的成果，这是因为，首先，在那时还没有一本书把其他学者的工作收集在一起，而这些工作只是散见于一些学术研究机构会的会报纪事中；其次，这些研究中的多数结果是全新的，且其中大多数结果还是用新方法讨论的；最后，所有的结果之间有着如此密切的联系，以致于如果不从一开始就重提前面的某些工作，后面的新成果就难以充分阐述清楚。

就在这时，出现了当时已经在高等算术领域做出了巨大贡献的Legendre的杰出著作《数论（Essai d'une théorie des nombres, Paris, a.VI）》，书中他不仅把到当时所发现的所有结果都收集在一起并加以系统整理，而且添加了许多他本人的新结果。

因为我过晚才见到这本书，当看到它时本书的大部分书稿已经完成并交给了出版商，所以当讨论类似的问题时，我就没有机会处处提到它了。

只是对该书的我认为必要的若干部分在补记中给出某些注记，我期望这位通情达理的学者不会不注意到这些并以他的宽容和真诚对此给予善意的理解。

（按法文本））本书的出版在超过四年的时间里遇到了许多阻碍。

在这一段时间里，我不仅进一步继续过去已经开始进行的研究（当时为了避免本书篇幅过大，决定分离出这些研究，准备在另外的地方发表），而且也从事许多新的研究。

此外，有许多我过去只是稍有触及而当时觉得似乎不必详细讨论的问题（例如，第37目，第82目及其后各目和其他的若干目）也得到了进一步发展，并导致一些看来是值得发表的更一般的结论（参见补记中关于第306目的注记）。

最后，主要由于第五篇的内容使本书的篇幅变得大大超出我原来的预期，使我只得削减了最初打算写的不少内容，特别是删去了整个第八篇（在本书的若干处已经提到了该篇，它包含了任意次代数同余方程的一般讨论（俄））。

在条件允许时，我将尽早地发表所有这些研究成果，它们容易构成与本书篇幅相当的一本书。

在多处困难的讨论中，我采用了综合性证明，且隐匿了导致这样的证明的分析，这样做主要是由于简洁性的要求，而这是我尽可能地力求做到的。

第七篇讨论的是分圆理论或正多边形理论，它本身不属于算术，但所涉及的那些原理无疑是唯一地依赖于高等算术的。

或许这会出乎数学家们的意料，但我希望他们对从这样的讨论导出的这些新结论会同样地感到高兴。

以上就是我要请读者注意的一些事情。

至于此书本身的价值，不是我应加以判断的。

我最大的愿望是，它会使得那些关心科学发展的人士感到高兴，不论是由于本书所提出的解法正是他们所一直寻求的，还是由于它开创了通向新探索的途径。

## &lt;&lt;算术探索&gt;&gt;

## 内容概要

《算术研究》是被誉为“数学王子”的德国大数学家高斯的第一部杰作，该书写于1797年，1801年正式出版，这是一部用拉丁文写成的巨著，是数论的最经典及最具权威性的著作。

在随后的200年时间里被翻译成多国文字，如德文、英文、俄文等。

这部著作在数学中的重要地位不亚于《圣经》在基督教中的地位，只有欧几里得的《几何原本》堪与之相比，因为高斯有一句名言：“数学是科学的女皇，数论是数学的女皇。”

这部著作共七篇。

第一篇讨论一般的数的同余：并首次引进了同余记号，这是现代数学中无处不在的等价和分类概念出现在代数中的最早的意义重大的例子。

第二篇讨论一次同余方程：其中严格证明了算术基本定理。

第三篇讨论幂的同余式：此篇详细讨论了高次同余式。

第四篇“二次同余方程”意义非同寻常：因为其中给出了二次互反律的证明，有人统计到21世纪初，二次互反律的证明已经超过200种，其中柯西、雅可比、迪利克雷、艾森斯坦、刘维尔、库默尔、克罗内克、戴德金、瓦莱-布桑、希尔伯特、弗罗贝尼乌斯、斯蒂尔切斯、M·里斯、韦伊都给出了新证法，可见问题之重要。

第五篇是“二次型与二次不定方程”在这一篇中关于二次型的特征的研究，标志着群特征标理论的肇始，使高斯成为群论的先驱者之一。

第六篇把前面的理论应用到各种特殊情形，并引入了超越函数。

第七篇是“分圆方程”，不少人认为此篇是《算术研究》的顶峰。

《算术研究》当时对于数学家也很难读，它曾被称为“七印封严之书”（这是西方人对难解之书喜用的词，近于中国人所谓的“天书”，典出《圣经·启示录》第五章第一节：“我看见坐宝座的右手中有书卷，里外都写着书，用七印封严了”）后来迪利克雷作了详细注释。

此书简洁完美的风格多少减慢了它的传播速度，而最终当富有才华的年轻人开始深入研读它时，由于出版商的破产，又买不到它了，甚至高斯最喜欢的学生艾森斯坦从未能拥有一本，有些学生不得不从头到尾抄录全书。

## 作者简介

作者：（德国）高斯 译者：潘承彪 张明尧 潘承彪，1938年生于江苏省苏州市，1960年毕业于北京大学数学力学系数学专业，1961年起在北京农业机化学院（后改名为北京农业工程大学、中国农业大学）工作，从1977年起同时在北京大学数学系工作。

主要从事数学，特别是数论的教学科研工作。

与胞兄潘承洞合著有《哥德巴赫猜想》、《解析数论基础》、《素数定理的初等证明》、《代数数论》、《初等数论》及《模形式导引》等。

张明尧，1945年12月生于山东省菏泽市，1967年毕业于安徽大学数学系，1981年获得硕士学位后在安徽大学工作；1987年获得博士学位后在中国科技大学工作；1994年调海南大学工作；1996年调上海华东理工大学工作。

译著有《数论中未解决的问题（第二版）》（原著者R.K.Guy）、《纯数学教程(纪念版)》（原著者G.H.Hardy）以及《哈代数论(第六版)》（原著者G.H.Hardy以及E.M.Wright修订者D.R.Heath-Brown以及J.H.Silverman）等。

## &lt;&lt;算术探索&gt;&gt;

## 书籍目录

第一篇 数的同余 第1~12目 11 同余的数, 模, 剩余及非剩余 第1~3目 12 最小剩余 第4目 23 关于同余的若干基本定理 第5~11目 24 若干应用 第12目 4第二篇 一次同余方程 第13~44目 55 关于素数、因数等的若干预备定理 第13~25目 56 一次同余方程的解 第26~31目 97 对若干个给定的模, 求分别同余于给定的剩余的数的方法 第32~36目 128 多元线性同余方程组 第37目 159 若干不同的定理 第38~44目 17第三篇 幂剩余 第45~93目 2310 首项为1的几何数列的各项的剩余组成周期序列 第45~48目 23首先讨论素数模 第49~81目 2411 当模为素数 $p$ 时, 周期的项数是 $p-1$ 的除数 第49目 2412 Fermat定理 第50~51目 2513 对应的周期的项数等于 $p-1$ 的给定的除数的数的个数 第52~56目 2614 原根, 基, 指标 第57目 2915 指标的运算 第58~59目 2916 同余方程 $x^n \equiv A \pmod{m}$ 的根 第60~68目 3017 不同系统的指标间的关系 第69~71目 3618 为特殊应用选取基 第72目 3719 求原根的方法 第73~74目 3820 关于周期和原根的几个不同的定理 第75~81目 39 (Wilson定理) 第76~78目 40合数模的讨论 第82~93目 4321 模为素数幂 第82~89目 4322 模为2的方幂 第90~91目 4623 由若干个素数合成的模 第92~93目 47第四篇 二次同余方程 第94~152目 4924 二次剩余和非剩余 第94~95目 4925 若模是素数, 则在小于模的数中剩余的个数等于非剩余的个数 第96~97目 5026 合数是否是给定素数的剩余或非剩余的问题依赖于它的因数的性质 第98~99目 5127 合数模 第100~105目 5228 给定的数是给定素数模的剩余或非剩余的一般判别法 第106目 56以给定的数为其剩余或非剩余的素数的讨论 第107~150目 5629 剩余 $-1$  第108~111目 5630 剩余 $+2$ 和 $-2$  第112~116目 5831 剩余 $+3$ 和 $-3$  第117~120目 6032 剩余 $+5$ 和 $-5$  第121~123目 6233 剩余 $+7$ 和 $-7$  第124目 6434 为一般讨论做准备 第125~129目 6435 用归纳方法来发现一般的(基本)定理及由其推出的结论 第130~134目 6836 基本定理的严格证明 第135~144目 7237 用类似方法证明第114目中的定理 第145目 7638 一般问题的解法 第146目 7739 以给定的数为其剩余或非剩余的全体素数的线性表示式 第147~150目 7840 其他数学家关于这些研究的工作 第151目 8141 一般形式的二次同余方程 第152目 83第五篇 二次型和二次不定方程 第153~307目 8442 研究计划; 型的定义及符号 第153目 8443 数的表示; 行列式 第154目 8444 数 $M$ 由型 $(a, b, c)$ 来表示时所属的表示式 $2-ac \pmod{M}$ 的值第155~156目 8545 一个型包含另一个型, 或包含在另一个型之中; 正常及反常变换 第157目 8646 正常等价及反常等价 第158目 8747 相反的型 第159目 8848 相邻的型 第160目 8949 型的系数的公约数 第161目 9050 给定的一个型变为另一个型的所有可能的同型变换之间的关系 第162目 9051 歧型 第163目 9552 与同时既是正常地又是反常地包含在另一个型中的型有关的定理 第164目 9553 由型表示数的一般性研究以及这些表示与变换的联系 第166~170目 10054 行列式为负的型 第171~181目 10355 特殊的应用: 将一个数分解成两个平方数, 分解成一个平方数和另一个平方数的两倍, 分解成一个平方数和另一个平方数的三倍 第182目 11456 具有正的非平方数行列式的型 第183~205目 11657 行列式为平方数的型 第206~212目 14758 包含在另一个与之不等价的型之中的型 第213~214目 15259 行列式为零的型 第215目 15560 所有二元二次不定方程的一般整数解 第216~221目 15861 历史注记 第222目 162关于型的进一步研究 第223~265目 16362 给定行列式的型的分类 第223~225目 16363 类划分成层 第226~227目 16664 层划分成族 第228~233目 16865 型的合成 第234~244目 17566 层的合成 第245目 19667 族的合成 第246~248目 19768 类的合成 第249~251目 19969 对给定的行列式, 在同一个层的每一个族中都有同样多个类 第252目 20270 不同的层中各个族所含类的个数的比较 第253~256目 20371 歧类的个数 第257~260目 20972 对于给定的行列式, 所有可能的特征有一半不能适合于任何正常本原(当行列式为负数时, 还是定正的)族 第261目 21573 基本定理以及与剩余 $-1, +2, -2$ 有关的其他定理的第二个证明 第262目 21574 精确地确定不能适合于族的那一半特征 第263~264目 21775 分解素数成两个平方数的特殊方法 第265目 21976 三元型研究杂谈 第266~285目 220对于二元型理论的某些应用 第286~307目 24777 怎样求一个型, 由它的加倍可以得到主族中一个给定的二元型 第286目 24778 除了在第263和264目中已经证明其不可能的那些特征之外, 其他所有的特征都与某个族相对应 第287目 24979 数及二元型分解为三个平方的理论 第288~292目 25080 Fermat定理的证明: 任何整数可以分解成三个三角数或者分解成四个平方数 第293目 25781 方程 $ax^2+by^2+cz^2=0$ 的解 第294~295目 25882 Legendre讲述基本定理的方法 第296~298目 26283 由任意的三元型表示零 第299目 26584 二元二次不定方程的有理通解 第300目 26785 族的平均个数 第301目

## &lt;&lt;算术探索&gt;&gt;

26886 类的平均个数 第302~304目 26987 正常本原类的特殊算法; 正则和非正则的行列式, 等 第305~307目 273第六篇 前面讨论的若干应用 第308~334目 28188 将分数分解为若干个较简单分数 第309~311目 28189 普通分数转换为十进制数 第312~318目 28390 用排除法解同余方程 $x^2 \equiv A \pmod{m}$  第319~322目 28791 用排除法解不定方程 $mx^2 + ny^2 = A$  第323~326目 29092 A为负数时同余方程 $x^2 \equiv A \pmod{m}$ 的另一种解法 第327, 328目 29593 判别合数与素数及寻求合数的因数的两个方法 第329~334目 297第七篇 分圆方程 第335~366目 30594 讨论可归结为把圆分为素数份的最简单情形 第336目 30595 关于弧(它由整个圆周的一份或若干份组成)的三角函数的方程; 把三角函数归结为方程 $x^n - 1 = 0$ 的根 第337~338目 306关于方程 $x^n - 1 = 0$ 的根的理论(假定n是素数) 第339~354目 30896 若不计根1, 则全部其余的根( )是属于方程 $X = x^n - 1 + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$  第339~340目 30897 函数X不能分解为系数均为有理数的因式的乘积 第341目 30998 进一步讨论的目的的说明 第342目 31099 中的所有的根可分为若干个类(周期) 第343目 311100 关于 中根组成的周期的几个的定理 第344~351目 312101 基于以上讨论解方程 $X = 0$  第352~354目 319进一步讨论根的周期 第355~360目 326102 有偶数项的和是实数 第355目 326103 把( )中的根分为两个周期的方程 第356目 327104 第四篇中提到的一个定理的证明 第357目 329105 把( )中的根分为三个周期的方程 第358目 330106 把求 中的根的方程化为最简方程 第359~360目 334以上研究在三角函数中的应用 第361~364目 337107 求对应于( )中每个根的角的方法 第361目 337108 不用除法从正弦与余弦导出正切, 余切, 正割及余割 第362目 338109 逐次降低关于三角函数的方程次数的方法 第363, 364目 339110 利用解二次方程或几何作图方法可实现的圆周的等分 第365, 366目 343补记 346附表 348译者注 351附录 高斯——数学王者 科学巨人 3571 德国情势 3572 贫寒之家 3603 心算神童 3614 学院三载 3635 大学攻读 3666 出手不凡 3707 科学随记 3718 博士论文 3759 算术探索 37810 一算成名 38211 恋爱结婚 38612 公爵之死 38713 丧妻再娶 39014 天文著作 39415 辉煌十年 39616 大地测量 40017 曲面理论 40418 非欧几何 40619 物理研究 41020 教学工作 41621 政治风波 41822 晚年生活 42123 业余爱好 42324 人际关系 42525 工作风格 43526 溘然长逝 44027 高斯全集 446注 448人名索引 458人名译名表 465编辑手记 471

## &lt;&lt;算术探索&gt;&gt;

## 章节摘录

献给最尊敬的Brunswick和Luneburg公爵Charles William Ferdinand亲王殿下最尊敬的亲王殿下：您允许我用您最尊贵的名字为这著作增添光辉，这是我最大的荣幸，把这部著作呈献给您是我神圣的职责。

最尊敬的亲王殿下，如果不是您的恩宠，我就不会迈入科学之门。

如果不是您对我研究工作的不间断的资助，我就不可能全身心地从事我所热爱的数学研究，正是由于您天下无双的慷慨大度，才使得我不为他事烦心，能让自己有这么多年致力于富有成果的专心思考和研究，并最终为我提供了在这部书中写下我的部分研究成果的机会。

当我最终准备好要将我的著作公诸于世时，又正是您独一无二的宽厚，才清除了不断延迟出版这一著作的所有障碍。

您对我以及我的工作所给予的这样的恩施，使我只能以深情感激和默默敬佩之心铭记永思；对此我不可能奉献相应的报答。

这不仅仅是因为我自己感到难以胜任这样的任务，更由于每一个人都知道您的异乎寻常的无私关怀赐予了所有献身于高深学科的人。

众人皆知，对于那些通常被视为过于高深且远离日常生活的科学，您从来就没有把它们排除在您的保护和鼓励之外，您本人以您无上的智慧明察，这是为了在所有的科学之间建立联系，并关系到人类社会各方面的繁荣幸福所必需的根本保证。

为此，作为表达我对您的最深敬意及我献身于最崇高的科学，我谨将本书奉献给您。

最尊敬的亲王殿下，如果您认为这本书是值得您始终给予我的厚爱，那么我就可以祝贺自己，我的辛劳没有白费，并得到了超乎一切的无上荣光。

最尊敬的亲王殿下您最忠实的仆人C.F.Gauss1801年7月于Brunswick



<<算术探索>>

名人推荐

版权说明

本站所提供下载的PDF图书仅提供预览和简介，请支持正版图书。

更多资源请访问:<http://www.tushu007.com>